MECZ FINAŁOWY – ZESTAW ZADAŃ Z ROZWIĄZANIAMI

Zadanie 1. Podany ułamek przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego:

$$\frac{242^4 - 363^4}{484^4}$$

Rozwiązanie:

$$\frac{242^4 - 363^4}{484^4} = \frac{(2\cdot 121)^4 - (3\cdot 121)^4}{(4\cdot 121)^4} = \frac{121^4(2^4 - 3^4)}{121^4\cdot 4^4} = \frac{2^4 - 3^4}{4^4} = \frac{16-81}{256} = -\frac{65}{256}$$

Zadanie 2. Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe, które są 12 razy większe od sumy swoich cyfr.

Rozwiązanie:
Liczbę trzycyfrową zapisujemy w postaci: $100x + 10y + z$, gdzie $x, y, z \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i $x \neq 0$.

Z treści zadania możemy zapisać równanie:

$$100x + 10y + z = 12(x + y + z)$$

$$88x - 2y - 11z = 0$$

Stąd otrzymujemy

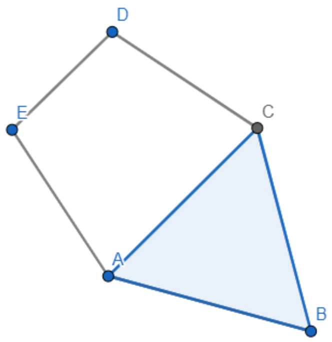
$$11(8x - z) = 2y$$

Jeżeli $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ to po prawej stronie mamy liczbę parzystą (nie większą od 18), a z lewej wielokrotność 11 $\{0, 11, 22, \ldots\}$. Sprzeczność.

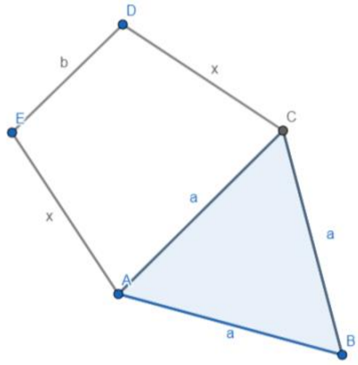
Gdyby $y = 0$, to po prawej stronie mamy $2y = 0$. Aby po lewej stronie uzyskać 0, to wówczas $z = 8x$. Otrzymujemy więc $x = 1, z = 8$.

Szukaną liczbą jest 108.

Zadanie 3. Popatrz na rysunek obok. Przekątna AC dzieli pięciokąt $ABCDE$ na dwie figury: trójkąt równoboczny i trapez równoramienny ($|DC| = |EA|$). Obwód trójkąta ABC jest o 6 mniejszy od obwodu trapezu $ACDE$. Obwód pięciokąta jest równy 78, a sumy przeciwległych boków trapezu są równe. Oblicz długości boków pięciokąta.



Rozwiązanie:



Niech: $|AB| = |AC| = |CB| = a$
$|DC| = |EA| = x$ oraz $|ED| = b$ $(a, b, x > 0)$.

Wówczas obwód trójkąta można wyrazić jako $3a$, obwód trapezu jako $a + b + 2x$, natomiast obwód pięciokąta jako $2a + 2x + b$.

Z treści zadania wiadomo, że obwód pięciokąta jest równy 78, zatem: $2a + 2x + b = 78$.

Z zależności między obwodami trójkąta i trapezu: $3a + 6 = a + 2x + b$.

Zatem: $78 = 2a + 2x + b = a + (a + 2x + b) = a + 3a + 6$, czyli $a = 18$.

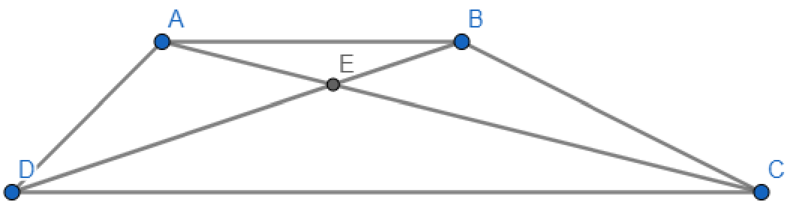
Dodatkowo wiadomo, że: $2x = a + b$, czyli $2x = 18 + b$.
Wykorzystując wartość obwodu: $36 + 18 + b + b = 78$, skąd $b = 12$.

Zatem $2x = 18 + 12$, skąd: $x = 15$.

Długości boków pięciokąta wynoszą: $|AB| = |BC| = 18, |CD| = 15, |DE| = 12, |EA| = 15$.

Zadanie 4. Dany jest trapez $ABCD$ taki, że $AB \parallel CD$ i $|AB| < |CD|$. W trapezie tym poprowadzono przekątne AC i BD, które przecięły się w punkcie E. Pola trójkątów ABE oraz CDE wynoszą odpowiednio 30 i 40. Oblicz pola trójkątów AED oraz BEC wiedząc, że pole trapezu $ABCD$ wynosi 100.

Rozwiązanie:



Niech h będzie wysokością trapezu $ABCD$.
Zauważmy, że
$P_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}|CD| \cdot h$ i $P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}|CD| \cdot h$
$P_{\triangle ACD} = P_{\triangle AED} + P_{\triangle CED}$ i $P_{\triangle BCD} = P_{\triangle BEC} + P_{\triangle CED}$
Stąd
$P_{\triangle ACD} = P_{\triangle BCD}$
$P_{\triangle AED} + P_{\triangle CED} = P_{\triangle BEC} + P_{\triangle CED}$
Czyli
$P_{\triangle AED} = P_{\triangle BEC} = P$
A zatem
$P_{ABCD} = P_{\triangle AED} + P_{\triangle CED} + P_{\triangle BEC} + P_{\triangle AEB}$
$100 = 2P + 30 + 40$
$P = 15$
Pole trójkąta AED jest równe 15 oraz pole trójkąta BEC wynosi 15.

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie takie liczby pierwsze p i q , które spełniają równanie:

$$2p(2q-3)-3(2q-3)-9=0$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy równoważnie podane równanie

$2p(2q-3)-3(2q-3)-9=0$

$(2p-3)(2q-3)=9$

Zatem

A. $\begin{cases}2p-3=1\\2q-3=9\end{cases}$ lub B. $\begin{cases}2p-3=9\\2q-3=1\end{cases}$ lub C. $\begin{cases}2p-3=3\\2q-3=3\end{cases}$

Stąd otrzymujemy

$\begin{cases}p=2\\q=6\end{cases}$ lub $\begin{cases}p=6\\q=2\end{cases}$ lub $\begin{cases}p=3\\q=3\end{cases}$

Po uwzględnieniu założenia, że liczby p i q są liczbami pierwszymi otrzymujemy odpowiedź

$\begin{cases}p=3\\q=3\end{cases}$

Zadanie 6. Wykaż, że spośród pięciu dowolnych liczb całkowitych można zawsze wybrać dwie takie liczby, że ich średnia arytmetyczna jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie:

Każda liczba całkowita jest albo parzysta albo nieparzysta.

Kluczowe jest zauważenie, że średnia arytmetyczna dwóch liczb parzystych, a także średnia arytmetyczna dwóch liczb nieparzystych jest liczbą całkowitą, ponieważ zarówno suma dwóch liczb parzystych jak i dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą, która po podzieleniu przez 2 da wynik całkowity.

Wystarczy zatem wyjaśnić, że spośród dowolnych pięciu liczb całkowitych można zawsze wybrać dwie liczby nieparzyste lub dwie liczby parzyste.

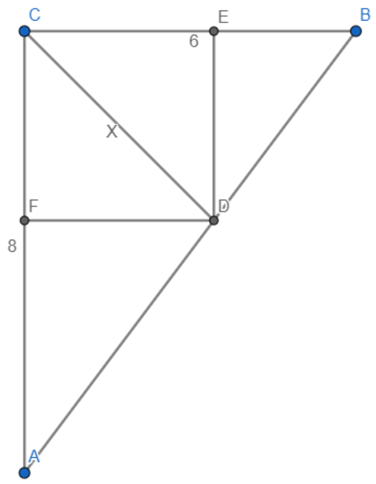
Zachodzi jedna z sytuacji:

1. albo wszystkie liczby są nieparzyste
2. albo jest jedna liczba parzysta i cztery nieparzyste
3. albo są dwie liczby parzyste i trzy nieparzyste
4. albo są trzy liczby parzyste i dwie nieparzyste
5. albo są cztery liczby parzyste i jedna nieparzysta
6. albo wszystkie liczby są parzyste

W każdej z w/w sytuacji warunki zadania są spełnione.

Zadanie 7. W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości $|BC|=6$ i $|AC|=8$ poprowadzono odcinek z wierzchołka kąta prostego, który dzieli kąt prosty na dwie równe części oraz przecina przeciwprostokątną AB w punkcie D. Oblicz długość odcinka CD.

Szkic rozwiązania:



Niech $|BC| = 6, |AC| = 8. (rys.)$

Wiedząc, że trójkąt jest prostokątny można obliczyć długość przeciwprostokątnej

Niech x oznacza długość szukanego odcinka CD.

Miary kątów DCB oraz ACD wynoszą 45°.

Można zatem zbudować kwadrat $FDEC$ o przekątnej x. Wówczas długość boku kwadratu to: $\frac{x}{\sqrt{2}}$.

Z równości pól otrzymujemy:
$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot |ED| + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot |DF|$

Czyli: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \quad | \cdot 2\sqrt{2}$

$48\sqrt{2} = 6x + 8x$

$48\sqrt{2} = 14x$, czyli $x = \frac{24\sqrt{2}}{7}$

Koszty związane z organizacją konkursu są finansowane ze środków na realizację projektu Potęga Matematyki otrzymanych z Fundacji mBanku oraz od Oddziału Poznańskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Konkurs objęty Patronatem Oddziału Poznańskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.