MECZE 1. KOLEJKI – ZESTAW ZADAŃ Z ROZWIĄZANIAMI

Zadanie 1. Bez obliczania dokładnych wartości iloczynów:

$11223344332212 \cdot 22446688664423$ oraz $11223344332211 \cdot 22446688664423$,

oblicz wartość ułamka:

$$\frac{11223344332212 \cdot 22446688664423 - 11223344332211}{11223344332211 \cdot 22446688664423 + 11223344332212}.$$

Szkic rozwiązania:
Niech $a = 11223344332211$
Wówczas podany ułamek możemy zapisać następująco

$$\frac{11223344332212 \cdot 22446688664423 - 11223344332211}{11223344332211 \cdot 22446688664423 + 11223344332212} =$$
$$= \frac{(a+1)(2a+1)-a}{a(2a+1)+a+1} = \frac{2a^2+a+2a+1-a}{2a^2+a+a+1} = \frac{2a^2+2a+1}{2a^2+2a+1} = 1$$

A zatem wartość podanego ułamka jest równa 1.

Zadanie 2. W równoległoboku $ABCD$, w którym $|BC| = 2|AB|$, połączono środek K boku BC z wierzchołkami A i D. Wykaż, że kąt AKD jest prosty.

Szkic rozwiązania:
Z własności równoległoboku wiadomo, że $|BC| = |AD|$ oraz $|AB| = |CD|$.
Niech $|AB| = |CD| = x$.
Wówczas z założenia, że $|BC| = 2|AB|$ i K jest środkiem boku BC otrzymujemy

$$|AB| = |CD| = |BK| = |KC| = x$$

A zatem trójkąty ABK oraz CDK są równoramienne, stąd
$|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle AKB| = \beta$, $|\sphericalangle CDK| = |\sphericalangle DKC| = \alpha$
Z twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta otrzymujemy
$|\sphericalangle ABK| = 180^\circ - 2\beta$, $|\sphericalangle DCK| = 180^\circ - 2\alpha$
Z własności równoległoboku
$|\sphericalangle ABK| + |\sphericalangle DCK| = 180^\circ$
$180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ$
$\beta + \alpha = 90^\circ$
Wiadomo, że $|\sphericalangle BKC| = 180^\circ$
$|\sphericalangle AKB| + |\sphericalangle AKD| + |\sphericalangle DKC| = 180^\circ$
$\beta + |\sphericalangle AKD| + \alpha = 180^\circ$
$|\sphericalangle AKD| = 180^\circ - \alpha - \beta$ i $\beta + \alpha = 90^\circ$
A zatem $|\sphericalangle AKD| = 90^\circ$, czyli kąt AKD jest prosty, co należało udowodnić.

Zadanie 3. Jakimi różnymi cyframi należy zastąpić litery *A, G, R* oraz *T,* aby uzyskać poprawne działanie:

$$\overline{TARG} \cdot G = \overline{GRAT}$$

Zapis $\overline{XYZW}$ oznacza liczbę czterocyfrową, np. dla $X = 1, Y = 2, Z = 3, W = 4$ zapis ten oznacza liczbę *1234*.

Szkic rozwiązania:
Analiza wartości liczby G dla kolejnych cyfr 0, 1, 2, …, 9.
Na przykład dla $G = 2$ otrzymujemy $G \cdot G = 4 = T$. Sprawdzamy
$(4000 + 100A + 10R + 2) \cdot 2 = 2000 + 100R + 10A + 4$
$8R - 19A = 600$, sprzeczność, gdyż *A, R* mają być cyframi.
Analogicznie rozważamy pozostałe wartości G.
Po rozważeniu wszystkich wartości G, okaże się, że możliwa jest tylko jedna wartość $G = 9$.
Wówczas $T = 1$.
$\overline{1AR9} \cdot 9 = \overline{9RA1}$ czyli:
$(1000 + 100A + 10R + 9) \cdot 9 = 9000 + 100R + 10A + 1$
$9000 + 900A + 9OR + 81 = 9000 + 100R + 10A + 1$
$89A + 8 = R$
Stąd wynika, że $A = 0$, czyli $R = 8$.
Otrzymujemy: $G = 9, T = 1,\ A = 0,\ R = 8$.
Bezpośrednie sprawdzenie $1089 \cdot 9 = 9801$ potwierdza, że uzyskane rozwiązanie jest poprawne.

Zadanie 4. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości $3k$ i $5k$, gdzie $k > 0$. Oblicz długość wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego.

Szkic rozwiązania:
Niech $|AB| = 5k,\ |AC| = 3k,\ |\sphericalangle BAC| = 90^\circ$,
$|AD| = h$ – wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego ΔABC
Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy
$|BC| = k\sqrt{34}$
Obliczmy pole trójkąta ABC
$P = \frac{|AB| \cdot |AC|}{2} = \frac{3k \cdot 5k}{2} = \frac{15k^2}{2}$
$P = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2} = \frac{k\sqrt{34} \cdot h}{2}$
Stąd
$\frac{k\sqrt{34} \cdot h}{2} = \frac{15k^2}{2}$
$h = \frac{15k}{\sqrt{34}} = \frac{15k\sqrt{34}}{34}$

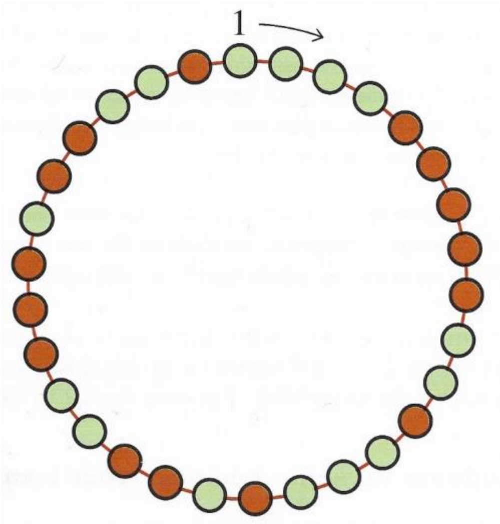
Zadanie 5. Jak ustawić na okręgu 15 monet o nominale 5zł i 15 monet o nominale 1 zł, jeżeli musimy odrzucić 15 z nich, odliczając co dziewiątą, tak aby zostały tylko monety o nominale 5zł?

Szkic rozwiązania:

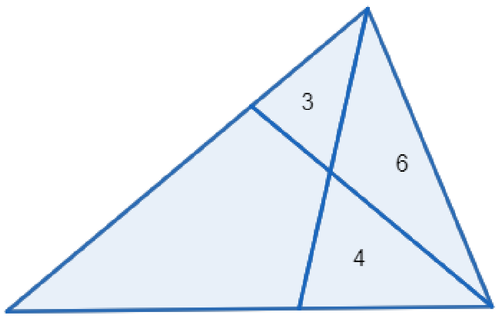
 Moneta o nominale 5zł

 Moneta o nominale 1zł

Oto przykład takiego ustawienia. Odliczanie należy rozpocząć od monety 5zł oznaczonej numerem 1.

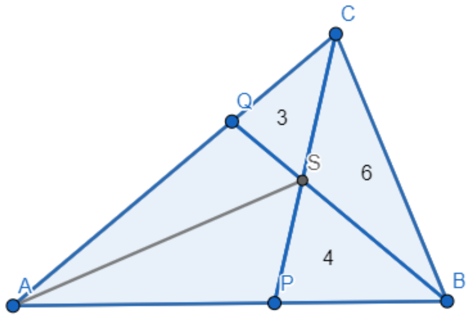


Zadanie 6. Dariusz podzielił trójkątny obszar ziemi dwiema liniami na cztery działki. Obszar o polu 6 podarował synowi Filipowi, o polu 4 oddał synowi Piotrowi, a najmniejszy o polu 3 – synowi Mikołajowi. Sam otrzymał największą działkę. Ile wynosi jej pole?



Szkic rozwiązania:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
Ze stosunków pól trójkątów które mają takie same wysokości wynika, że punkt S dzieli QB w stosunku 1: 2 oraz PC w stosunku 2: 3.
Dorysowując odcinek AS i oznaczając pole trójkąta ASQ jako *b* oraz pole trójkąta APS jako *a*, dochodzimy do wniosku, że:
$\frac{b}{a+4} = \frac{1}{2}$ oraz $\frac{b+3}{a} = \frac{3}{2}$
Wynika z tego, że $2b = a + 4$ oraz $2b + 6 = 3a$.
Daje to rozwiązania: $a = 5$ oraz $b = 4{,}5$.
Zatem pole czworokąta APSQ wynosi $\frac{19}{2}$.



Zadanie 7. Czy liczba

$$4^{2020} - 7^{2016}$$

jest podzielna przez 5? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania:

Kolejne potęgi liczby 4 mają w rzędzie jedności cyfrę 4 lub 6, natomiast potęgi liczby 7 mają kolejno 7, 9, 3, 1.

Potęga 4^{2020} ma parzysty wykładnik, więc ostatnią cyfrą będzie 6. Potęga 7^{2016} ma wykładnik podzielny przez 4, więc ostatnią cyfrą będzie 1.

Różnica tych dwóch potęg będzie miała w rzędzie jedności cyfrę 5, więc będzie podzielna przez 5.

Koszty związane z organizacją konkursu są finansowane ze środków na realizację projektu Potęga Matematyki otrzymanych z Fundacji mBanku oraz od Oddziału Poznańskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Konkurs objęty Patronatem Oddziału Poznańskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.