MECZE 2. KOLEJKI – ZESTAW ZADAŃ Z ROZWIĄZANIAMI

Zadanie 1. Czy można 202 monety jednozłotowe rozmieścić w 20 pudełkach tak, aby w każdym pudełku była co najmniej jedna moneta i w każdym pudełku była inna kwota pieniędzy? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania:

Odpowiedź: Nie można. Najmniejszą liczbą monet potrzebną do realizacji tego rozmieszczenia jest

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 19 + 20 = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210 > 202$$

Zadanie 2. Czy liczba $\frac{10^{4040}+4\cdot 10^{2020}-5}{45}$ jest liczbą całkowitą? Odpowiedź uzasadnij.

***Szkic rozwiązania*:**

Aby uzasadnić, czy podana liczba jest całkowita wystarczy sprawdzić, czy licznik jest podzielny przez 45, czyli czy liczba $10^{4040} + 4 \cdot 10^{2020} - 5$ jest podzielna przez 5 i przez 9.

Każdy z trzech składników tworzących liczbę $10^{4040} + 4 \cdot 10^{2020} - 5$ jest podzielny przez 5, więc cała liczba jest podzielna przez 5.

Licznik ułamka można zapisać w postaci: $10^{4040} + 3\,999 \ldots 99\,5$ (2019 zapisanych cyfr 9).

Suma cyfr wyniku jest równa: $1 + 3 + 2019 \cdot 9 + 5 = 9 + 2019 \cdot 9 = 2020 \cdot 9$, czyli jest podzielna przez 9.

Zatem liczba $\frac{10^{4040}+4\cdot 10^{2020}-5}{45}$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 3. O pewnej liczbie dwucyfrowej wiadomo, że ma dokładnie trzy dzielniki będące liczbami jednocyfrowymi o sumie równej 8 oraz dokładnie trzy dzielniki będące liczbami dwucyfrowymi. Wyznacz tę liczbę.

Szkic rozwiązania:

Jednym z dzielników jednocyfrowych jest 1. Suma dwóch pozostałych jest równa:

$$8 - 1 = 7$$

Należy rozważyć rozkłady $7 = 3 + 4$ i $7 = 2 + 5$.

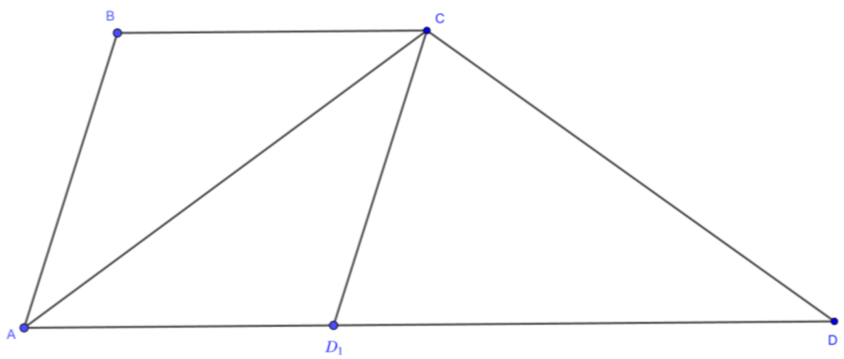
Gdyby szukanymi dzielnikami były 3 i 4, to również dzielnikiem byłaby liczba 2, a wtedy byłyby cztery dzielniki jednocyfrowe. Pozostaje więc para 2 i 5.

Znajdźmy liczby dwucyfrowe, których jedynymi dzielnikami jednocyfrowymi są 1, 2 i 5. Takich liczb należy szukać wśród dwucyfrowych wielokrotności 10. Jedynymi liczbami spełniającymi warunki zadania są 10 i 50 (inne mają więcej dzielników jednocyfrowych).

Jedynym dzielnikiem dwucyfrowym liczby 10 jest 10.

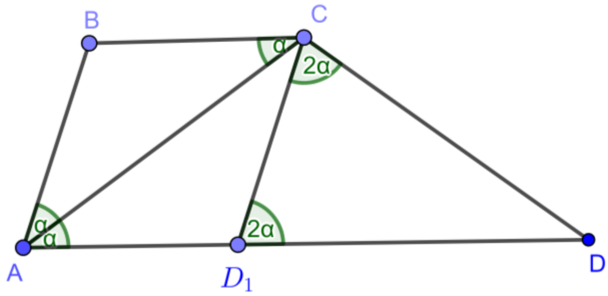
Zatem tylko liczba 50 spełnia wszystkie warunki zadania.

Zadanie 4. Dany jest trapez $ABCD$, o podstawach AD oraz BC(rys. poniżej). Z wierzchołka C poprowadzono prostą CD_1 równoległą do ramienia AB. Podstawa BC ma taką samą długość jak ramię AB, a przekątna AC jak ramię CD. Ponadto półprosta CD_1 jest dwusieczną kąta BCD. Wyznacz kąty tego trapezu.



Szkic rozwiązania:

Zauważmy, że trójkąty ABC i ACD są równoramienne, a zatem:
$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ACB|$ oraz $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ADC|$.
Kąty ACB i CAD oraz BAC i ACD_1 jako naprzemianległe są równe (albo zauważamy, czworokąt $ABCD_1$ jest rombem i korzystamy z własności rombu).
Ponadto kąty BAD i CD_1D jako odpowiadające też są równe.



Zatem:
$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ADC| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CD_1D| = 2\alpha$

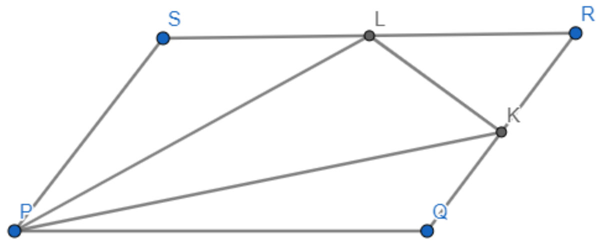
Wiadomo, że CD_1 jest dwusieczną kąta BCD, a zatem $|\sphericalangle BCD_1| = |\sphericalangle D_1CD| = 2\alpha$.

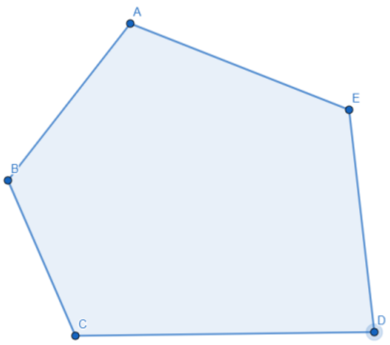
Z twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych dla trójkąta D_1CD otrzymujemy
$5\alpha = 180^\circ$
$\alpha = 36^\circ$
Miary kątów trapezu są równe: 36°, 72°, 108° i 144°.

Zadanie 5. W równoległoboku $PQRS$ punkty K, L są odpowiednio środkami boków: QR i RS. Jaką częścią pola równoległoboku $PQRS$ jest pole trójkąta PKL. Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania:
Niech $|PQ| = a$, h – wysokość równoległoboku opuszczona na bok PQ, S – pole powierzchni równoległoboku $PQRS$.

$$P_{PKQ} = \frac{1}{2}P_{PRQ} = \frac{1}{4}S$$
$$P_{KRL} = \frac{1}{4}P_{QRS} = \frac{1}{8}S$$
$$P_{PSL} = \frac{1}{2}P_{PSR} = \frac{1}{4}S$$
$$P_{PKL} = S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{8}S - \frac{1}{4}S = \frac{3}{8}S$$





Zadanie 6. W pięciokącie ABCDE (rys.) narysowano wszystkie przekątne. Oblicz, ile można wskazać par odcinków (boków lub przekątnych) rozłącznych, tzn. takich, które nie mają punktów wspólnych.

Szkic rozwiązania:

Niech A, B, C, D, E będą kolejnymi wierzchołkami pięciokąta.

Rozważmy odcinki o końcu w wierzchołku A. Zauważmy, że istnieją 3 odcinki rozłączne z AB, 1 odcinek rozłączny z AC, 1 rozłączny z AD i 3 z AE. Razem daje to 8 par odcinków rozłącznych, przy czym jeden z odcinków w każdej z par ma koniec w punkcie A.

Rozważmy teraz te odcinki o końcu w punkcie B, których końcem nie jest punkt A. Dodatkowo otrzymujemy jeden odcinek rozłączny z BC oraz jeden odcinek rozłączny z BE. Przy czym jeden z odcinków w każdej parze ma koniec w punkcie B i żaden nie ma końca w punkcie A.

Zauważmy, że innych par odcinków rozłącznych poza wskazanymi nie ma.
Łącznie istnieje zatem $8 + 2 = 10$ par odcinków rozłącznych.

Zadanie 7. Oblicz wartość sumy:
$$\frac{2}{6\cdot 8} + \frac{2}{8\cdot 10} + \frac{2}{10\cdot 12} + \cdots + \frac{2}{2016\cdot 2018} + \frac{2}{2018\cdot 2020}$$

Szkic rozwiązania:

$$\frac{2}{6\cdot 8} + \frac{2}{8\cdot 10} + \frac{2}{10\cdot 12} + \cdots + \frac{2}{2016\cdot 2018} + \frac{2}{2018\cdot 2020} =$$
$$\frac{8-6}{6\cdot 8} + \frac{10-8}{8\cdot 10} + \frac{12-10}{10\cdot 12} + \cdots + \frac{2018-2016}{2016\cdot 2018} + \frac{2020-2018}{2018\cdot 2020} =$$

$$\frac{8}{6\cdot 8}-\frac{6}{6\cdot 8}+\frac{10}{8\cdot 10}-\frac{8}{8\cdot 10}+\frac{12}{10\cdot 12}-\frac{10}{10\cdot 12}+\cdots+\frac{2018}{2016\cdot 2018}-\frac{2016}{2016\cdot 2018}+\frac{2020}{2018\cdot 2020}-\frac{2018}{2018\cdot 2020}=$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2018}+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2020}=$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{2020}=\frac{1010-3}{6060}=\frac{1007}{6060}$$

Koszty związane z organizacją konkursu są finansowane ze środków na realizację projektu Potęga Matematyki otrzymanych z Fundacji mBanku oraz od Oddziału Poznańskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

mBank | ptm rok zał. 1919 | UAM Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Konkurs objęty Patronatem Oddziału Poznańskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.