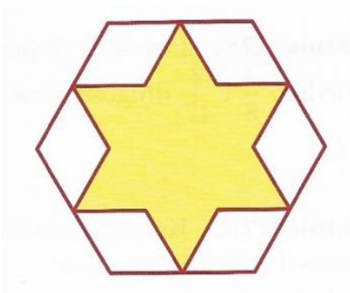
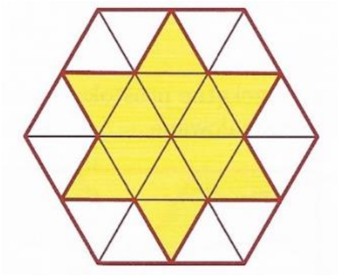
MECZE PÓŁFINAŁOWE – ZESTAW ZADAŃ Z ROZWIĄZANIAMI

Zadanie 1. Wierzchołki pokazanej na rysunku gwiazdy są środkami boków sześciokąta foremnego, a jej ramiona są równoległe do odpowiednich boków tego sześciokąta. Ile wynosi pole sześciokąta, jeśli pole tej gwiazdy jest równe 6?



Rozwiązanie:



Pokazany obok podział dzieli sześciokąt na 24 przystające trójkąty równoboczne.

Zarówno część zamalowana, jak i niezamalowana zawiera taką samą ich liczbę (12).
Ponieważ pole części zamalowanej jest równe 6, to pole części niezamalowanej również jest równe 6.
Stąd pole sześciokąta wynosi 12 j^2.

Zadanie 2. Wykaż, że liczba:

$$1 + 2021 + 2021^2 + 2021^3 + 2021^4 + 2021^5 + 2021^6 + 2021^7$$

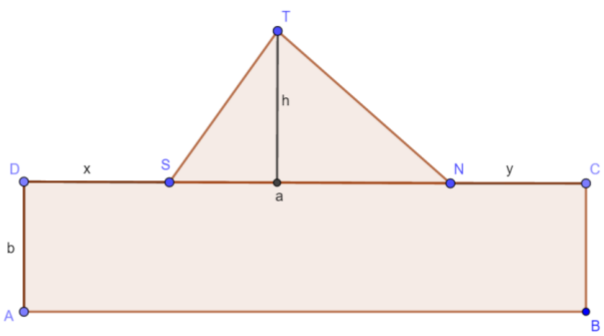
jest podzielna przez 337.

Szkic rozwiązania:

$$\begin{gathered} 1 + 2021 + 2021^2 + 2021^3 + 2021^4 + 2021^5 + 2021^6 + 2021^7 = \\ = 1 + 2021 + 2021^2(1 + 2021) + 2021^4(1 + 2021) + 2021^6(1 + 2021) = \\ = 2022 + 2021^2 \cdot 2022 + 2021^4 \cdot 2022 + 2021^6 \cdot 2022 = \\ = 2022 \cdot (1 + 2021^2 + 2021^4 + 2021^6) = \\ = 337 \cdot 6 \cdot (1 + 2021^2 + 2021^4 + 2021^6) \end{gathered}$$

Zadanie 3. Dany jest prostokąt ABCD oraz trójkąt SNT (rysunek). Oblicz pole prostokąta ABCD, wiedząc, że:

1) pole trójkąta SNT jest równe 35 j^2;
2) $a = x + y$ (gdzie a oznacza długość odcinka SN);
3) $b = \frac{6}{7}h$, gdzie h to wysokość trójkąta SNT poprowadzona do podstawy a.



Rozwiązanie:
Pole prostokąta $ABCD$: $P = b \cdot (x + a + y)$
Wiemy również, że: $b = \frac{6}{7}h$
Pole trójkąta SNT: $P_\Delta = \frac{1}{2}ah = 35$. Stąd $a \cdot h = 70$.
Ponadto w prostokącie $ABCD$: $|AB| = |CD| = x + a + y = 2a$ oraz $|AD| = b = \frac{6}{7}h$.
Pole prostokąta $ABCD$ $P = |AB| \cdot |AD| = 2a \cdot \frac{6}{7}h = \frac{12}{7}ah = \frac{12}{7} \cdot 70 = 120$ j^2.

Zadanie 4. Wykaż, że jeśli liczby a i b są całkowite oraz liczba $a - 5b$ jest podzielna przez 17, to liczba $10a + b$ również jest podzielna przez 17.

Rozwiązanie:

Z założenia wiadomo, że $a - 5b$ jest liczbą podzielną przez 17, zatem można ją zapisać w postaci $17k$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

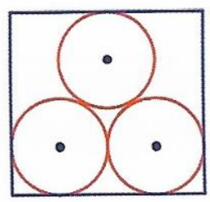
Liczbę $10a + b$ można zapisać jako: $10(a - 5b) + 51b$.

Zatem: $10a + b = 10(a - 5b) + 51b = 10 \cdot 17k + 3 \cdot 17b = 17(10k + 3b)$

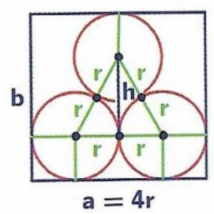
Wyrażenie postaci $10k + 3b$ jest liczbą całkowitą.

Zatem skoro liczbę $10a + b$ można przedstawić w postaci iloczynu liczby całkowitej i 17, jest ona podzielna przez 17.

Zadanie 5. W prostokąt wpisano trzy okręgi o promieniu r wzajemnie styczne. Każdy z okręgów jest styczny do jednego lub dwóch boków prostokąta (zobacz rysunek). Wykaż, że pole prostokąta wynosi $4(2 + \sqrt{3})r^2$.



Szkic rozwiązania:



Łącząc środki okręgów łatwo zauważyć, że odcinki te tworzą trójkąt równoboczny.
Stąd otrzymujemy, że bok a prostokąta jest równy $4r$, a drugi bok prostokąta b wynosi $2r + h$, gdzie h jest wysokością trójkąta równobocznego o boku $2r$.

$$a = 4r$$
$$b = 2r + h$$

Obliczamy wysokość h, a następnie długość boku b prostokąta

$$h = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$
$$b = 2r + r\sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)r$$

A zatem pole prostokąta

$$P = ab$$
$$P = 4r \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)r$$
$$P = 4\left(2 + \sqrt{3}\right)r^2$$

co należało udowodnić.

Zadanie 6. W mieście Kozice Wielkie są dwie szkoły podstawowe. Uczy się w nich łącznie 1620 uczniów. W SP Nr 2 jest o 16% więcej uczniów niż w SP Nr 1. W obu szkołach łącznie wszystkich dziewcząt jest o 40 więcej niż chłopców. Gdyby 55 dziewcząt przeszło z SP Nr 2 do SP Nr 1, to w obu podstawówkach byłoby tyle samo dziewcząt. Jaki procent uczniów SP Nr 1 to chłopcy?

Rozwiązanie:

x – liczba uczniów SP Nr 1 y – liczba uczniów SP Nr 2
d – liczba wszystkich dziewcząt (w obu szkołach)
c – liczba wszystkich chłopców (w obu szkołach)

W mieście Kozice Wielkie są dwie szkoły podstawowe. Uczy się w nich łącznie 1620 uczniów. W SP Nr 2 jest o 16% więcej uczniów niż w SP Nr 1.

$$y = 1{,}16x$$
$$x + 1{,}16x = 1620$$
$$x = 750$$
$$y = 1{,}16x = 870$$

W mieście Kozice Wielkie są dwie szkoły podstawowe. Uczy się w nich łącznie 1620 uczniów. W obu szkołach łącznie wszystkich dziewcząt jest o 40 więcej niż chłopców.

$$d + c = x + y = 1620$$
$$d = c + 40$$
$$c + c + 40 = 1620$$
$$c = 790$$
$$d = 790 + 40 = 830$$

Gdyby 55 dziewcząt przeszło z SP Nr 2 do SP Nr 1, to w obu podstawówkach byłoby tyle samo dziewcząt.

d_1 – liczba dziewcząt w SP Nr 1 d_2 – liczba dziewcząt w SP Nr 2

$$d_2 - 55 = d_1 + 55$$
$$d_2 = d_1 + 110$$
$$d_1 + d_1 + 110 = 830$$
$$d_1 = 360$$

Jaki procent uczniów SP Nr 1 to chłopcy?
Liczba chłopców w SP Nr 1 to 750 – 360 = 390.

$$\frac{390}{750} \cdot 100\% = 52\%$$

<u>Chłopcy stanowią 52% uczniów SP Nr 1.</u>

Zadanie 7. Dwóch graczy pisze kolejne cyfry liczby dziesięciocyfrowej. Drugi gracz zmierza do tego, żeby otrzymana liczba dzieliła się przez 7, a pierwszy chce mu w tym przeszkodzić. Kto ma strategię zwycięską przy prawidłowej grze? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania:

Strategię zwycięską ma drugi gracz.
Dla drugiego gracza ważna jest ostatnia cyfra. Po ostatniej kolejce rozpoczynającego grę otworzona zostanie 9 – cyfrowa liczba. Podzielmy otrzymaną liczbę przez 7 z resztą.
Postać tej liczby to $7q + r$, gdzie $r \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.
Zastanówmy się, czy może drugi gracz obrać swoją ostatnią cyfrę a w ten sposób, żeby 10-cyfrowa liczba była podzielna przez 7.

$$10(7q + r) + a = 70q + 7r + (3r + a)$$

Z powyższego zapisu wynika, że drugi gracz powinien wybrać cyfrę a taką, by $3r + a$ było podzielne przez 7.
Rozważmy różne możliwości:

$r = 0$, to $a = 7$
$r = 1$, to $a = 4$
$r = 2$, to $a = 1$
$r = 3$, to $a = 5$
$r = 4$, to $a = 2$
$r = 5$, to $a = 6$
$r = 6$, to $a = 3$

Koszty związane z organizacją konkursu są finansowane ze środków na realizację projektu Potęga Matematyki otrzymanych z Fundacji mBanku oraz od Oddziału Poznańskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Konkurs objęty Patronatem Oddziału Poznańskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.