Zasada szufladkowa Dirichleta

18 grudnia 2020

1. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n, taką że w zbiorze n osób istnieją dwie, które urodziły się tego samego dnia tygodnia.

2. Ze zbioru wszystkich ciągów binarnych długości 3 wybieram dowolne 5. Wykazać, że różnica pewnych dwóch z nich wynosi 100.

3. Każdy punkt płaszczyzny kolorujemy jednym z dwóch kolorów. Pokazać, że można wskazać 2 punkty w tym samym kolorze, których odległość wynosi 1.

4. Pokazać, że wśród dowolnych 11 liczb naturalnych istnieją dwie, które mają tę samą cyfrę jedności.

5. Wykazać, że wśród dowolnych 27 osób istnieją trzy, które urodziły się w tym samym miesiącu.

6. Udowodnić, że wśród dowolnych n liczb naturalnych niepodzielnych przez n istnieją dwie, których różnica dzieli się przez n.

7. Dane są liczby naturalne a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Liczby b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 to te same liczby ustawione w innej kolejności. Pokazać, że liczba

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)(a_4 - b_4)(a_5 - b_5)$$

jest parzysta.

8. Każdy punkt okręgu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Udowodnić, że pewne trzy tworzą jednokolorowy trójkąt równoramienny.

9. Udowodnić, że wśród dowolnych 6 osób pewne trzy się znają lub pewne trzy się nie znają.

10. Z talii 52 kart wybieram 9 kart. Udowodnić, że pewne 3 z nich są tego samego koloru.

Zadania trudniejsze

10. W kole o promieniu 1 wybrano 7 punktów. Udowodnić, że pewne dwa z nich są odległe o nie więcej niż jeden.

11. Udowodnić, że wśród dowolnych 17 podzbiorów zbioru 5-elementowego istnieją dwa, które są ze sobą rozłączne (ich część wspólna jest zbiorem pustym).

12. Ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ wybieramy $n + 1$ liczb. Pokazać, że można wybrać dwie z nich, z których jedna dzieli się przez drugą. Czy możemy wybrać n liczb zamiast $n + 1$?

13. Udowodnić, że w zbiorze $\{7, 7^2, 7^3, ..., 7^{1001}\}$ istnieje liczba, która kończy się cyframi 001.

14. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z dwóch kolorów. Udowodnić, że pewne 4 punkty tego samego koloru są wierzchołkami prostokąta.

15. Udowodnić, że w dowolnym n-elementowym zbiorze liczb naturalnych istnieje niepusty podzbiór, którego suma elementów jest podzielna przez n.

16. Na przyjęciu spotkało się n osób. Udowodnić, że pewne dwie z nich mają wśród zebranych taką samą liczbę znajomych.

17. W trójkącie równobocznym o boku 1 znajduje się 9 punktów. Udowodnić, że pewne dwa z nich są odległe o nie więcej niż $\frac{1}{3}$.

18. Ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ wybieram 51 liczb. Udowodnić, że pewne dwie z nich różnią się o 1.

19. Udowodnić, że wśród dowolnych siedmiu liczb naturalnych istnieją dwie, których suma lub różnica dzieli się przez 10.