ZAPIS DZIESIĘTNY

We wszystkich zadaniach liczba n jest całkowita dodatnia.

1. Wyznacz wszystkie liczby dwucyfrowe, które po wstawieniu cyfry 0 pomiędzy cyfrę setek i jedności wzrastają 9 razy.
2. W pewnej liczbie trzycyfrowej cyfra dziesiątek jest równa sumie cyfry setek i cyfry jedności. Wykaż, że ta liczba dzieli się przez 11.
3. Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe, które są równe podwojonemu iloczynowi swoich cyfr.
4. Czy istnieje liczba trzycyfrowa, która jest większa od iloczynu swoich cyfr?
5. Udowodnij, że liczba $\underbrace{99\ldots9}_{2n-1}1$ jest złożona.
6. Udowodnij, że liczba $\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n}$ jest iloczynem pewnych dwóch kolejnych liczb naturalnych.
7. Wykaż, że liczba $\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{11\ldots1}_{n}$ jest złożona.
8. Wykaż, że liczba $\underbrace{11\ldots1}_{n+1}\underbrace{55\ldots5}_{n}6$ jest kwadratem liczby naturalnej.
9. Wyjaśnij fenomen: $\frac{1}{4} = \frac{16}{64} = \frac{166}{664} = \frac{1666}{6664} = \frac{16666}{66664} = \ldots$.

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

1. Rozwiąż równanie $\big||2x-1|-3\big| = |x+1|$.
2. Rozwiąż nierówność $|3x-1|+|2x+1| < 3$
3. Wykaż, że jeśli $|a-b| = |b-c| = |c-a|$, to $a=b=c$.

UKŁADY RÓWNAŃ

Wszystkie układy należy rozwiązać w liczbach rzeczywistych.

1. $\begin{cases} x^2+z &= 2y+5 \\ y^2+z &= 2x+5 \\ x+y &= z-1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+1 &= 2y \\ y^2+1 &= 2x \end{cases}$

3. $\begin{cases} a^2+b^2+c^2 &= 23 \\ a+2b+4c &= 22 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2 &= 8z-6 \\ y^2+z^2 &= 8x-6 \\ z^2+x^2 &= 8y-6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} abc &= 1 \\ bcd &= 2 \\ cde &= 3 \\ dea &= 4 \\ eab &= 5 \end{cases}$

PARZYSTOŚĆ

1. Na balu było 7 chłopców i 6 dziewczynek. Każdy chłopiec zatańczył z trzema dziewczynkami. Wykaż, że pewne dwie dzewczynki zatańczyły z inną liczbą chłopców.
2. Czy w wyrażeniu $1 + 2 + 3 + \ldots + 10$ można niektóre znaki $+$ zamienić na $-$, tak by otrzymać w wyniku 0?
3. Czy istnieje 13-ścian wypukły, którego wszystkie ściany są pięciokątami?
4. Liczby a, b, c, d, e, f są całkowite. Czy $3a-b$, $3b-c$, $3c-d$, $3d-e$, $3e-f$, $3f-a$ mogą być sześcioma kolejnymi liczbami naturalnymi?
5. Na tablicy jest 2020 liczb dodatnich i 2021 liczb ujemnych. Możemy zmazać dwie dowolnie wybrane liczby i zapisać ich iloczyn. Postępujemy w ten sposób aż na tablicy zostanie jedna liczba. Jaki będzie jej znak?
6. Mamy do dyspozycji szachownicę 9×9, której wszystkie pola są białe. Ruch polega na wyborze czterech pól tworzących kwadrat 2×2 i zmianie ich kolorów (białe na czarne, a czarne na białe). Uzasadnij, że wykonując takie ruchy nie można doprowadzić do tego, by wszystkie pola szachownicy 9×9 były czarne.

UKŁADANKI

1. Czy szachownicę z wyciętymi polami $C3$ i $F6$ można podzielić na prostokąty złożone z dwóch pól?
2. Czy kwadrat 10×10 można podzielić na:
   (a) I-tetramina,
   (b) T-tetramina,
   (c) L-tetramina?
3. Jaka jest największa liczba Z-tetramin, które można wyciąć z kwadratu 9×9?

KWADRATY LICZB NATURALNYCH

1. Dwie różne liczby trzycyfrowe mają te same cyfry, ale w odwrotnej kolejności. Czy różnica tych liczb może być kwadratem liczby naturalnej?
2. Uzasadnij, że liczba 300-cyfrowa, w której zapisie jest 100 dwójek i 200 piątek nie może być kwadratem liczby naturalnej.
3. Dla jakich cyfr c liczba $\overline{\ldots cc}$ może być kwadratem liczby naturalnej?
4. Ostatnią cyfrą liczby $345345345345\ldots$ jest 3, 4 lub 5. Czy ta liczba może być kwadratem liczby naturalnej?
5. Uzasadnij, że liczba $\underbrace{44\ldots4}_{2n}$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.
6. Pewne dwie liczby całkowite dodatnie różnią się o
   (a) 1;
   (b) 3;
   (c) 15.

   Ponadto iloczyn tych liczb jest kwadratem liczby naturalnej. Wyznacz te liczby. Dla każdego podpunktu znajdź wszystkie możliwe rozwiązania.
7. Wyznacz wszystkie pary (a, b) liczb całkowitych dodatnich, dla których $a^2 + 3b$ i $b^2 + 3a$ są kwadratami liczb naturalnych.

ŚRODKI BOKÓW TRÓJKĄTA

1. W trapezie $ABCD$ punkty M i N są środkami odpowiednio podstaw AB i CD. Punkt P należy do odcinka MN. Udowodnij, że trójkąty ADP i BCP mają równe pola.

2. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Punkt X leży wewnątrz tego sześciokąta. Punkty K, L, M, N, P, Q są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DE, EF, FA. Wykaż, że suma pól czworokątów $QAKX$, $LCMX$, $NEPX$ nie zależy od wyboru punktu X.

3. Dany jest trójkąt ABC oraz taki trójkąt PQR, że punkty A, B, C są środkami odcinków odpowiednio CQ, AR, BP. Udowodnij, że pole trójkąta PQR jest 7 razy większe od pola trójkąta ABC.

4. Rozwiąż zadanie analogiczne do poprzedniego, dla czworokąta wypukłego. Jaką stałą otrzymamy zamiast siódemki?

5. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC| > |BC|$. Punkt P jest rzutem prostokątnym punktu B na dwusieczną kąta ACB. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Wiedząc, że $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, oblicz długość odcinka PM.

6. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Wykaż, że obwód trójkąta ACE jest nie mniejszy od $2|BD|$.

7. Na bokach BC i AC trójkąta ABC zbudowano (na zewnątrz trójkąta) kwadraty $BCDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF. Wykaż, że $|MN| = \frac{1}{2}|AB|$.